

# **ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ**

**Шумен, 29.03-31.03.2019 година**

**Б Р О Ш У Р А**

# УКАЗАНИЕ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

## V клас

5.1. Дадени са изразите:  $A = \frac{2,5 - 2\frac{1}{3}}{2,5 + 3\frac{1}{3}} \cdot \frac{1,4 + 1\frac{1}{3}}{1,4 - 1\frac{1}{3}}$  и  $B = \frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 1,3$ .

А) Пресметнете  $A$  и  $B$  и ги сравнете.

Б) Задраскайте 2019-тата цифра след десетичната запетая на частното  $C = A:B$  и сравнете новополучената десетична дроб със стойността на  $C$ .

**Решение:**

$$\text{А) } A = \frac{2,5 - 2\frac{1}{3}}{2,5 + 3\frac{1}{3}} \cdot \frac{1,4 + 1\frac{1}{3}}{1,4 - 1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}} \cdot \frac{\frac{7}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{7}{5} - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{35}{6}} \cdot \frac{\frac{41}{15}}{\frac{1}{15}} = \frac{41}{35} \quad (1 \text{ т.})$$

$$B = \frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 1,3 = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} + 1,3 = \frac{28}{10} + \frac{13}{10} = \frac{41}{10} \quad (1 \text{ т.}) \Rightarrow B > A \quad (1 \text{ т.})$$

$$\text{Б) } C = \frac{41}{35} : \frac{41}{10} = \frac{2}{7} = 0,(285714) \quad (0,5 \text{ т.})$$

$2019:6 = 336$  (ост. 3) **(0,5 т.)**  $\Rightarrow$  2019-тата цифра след десетичната запетая на  $C$  е 5 **(1 т.)**.

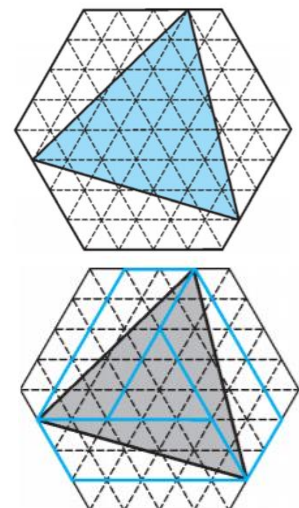
Следователно новополучената дроб е по-голяма от  $C$  **(1 т.)**.

5.2. Фигурата на чертежа е съставена от еднакви равностранни триъгълници с лице  $1 \text{ cm}^2$ . Намерете лицата на оцветения триъгълник и на неоцветената част от фигурата.

**Решение:**

Оцветеният триъгълник се състои от 3 триъгълника с лице половината от лицето на успоредник с лице  $20 \text{ cm}^2$  **(2 т.)** и един триъгълник с лице  $9 \text{ cm}^2$  **(1 т.)** Следователно лицето му е:  $3 \cdot (20 : 2) + 9 = 39 \text{ cm}^2$ . **(1 т.)**

Фигурата се състои от 96 триъгълничета **(1 т.)**. Следователно лицето на неоцветената фигура е  $96 - 39 = 57 \text{ cm}^2$ . **(1 т.)**



**5.3.** В кутия има 100 бонбона. Ани изяла няколко бонбона. Дошла Бети, и Ани изяла още един бонбон, за да може останалото количество бонбони да се раздели по равно на двете. След това дошла Вяра и Ани отново изяла 1 бонбон, за да могат да разделят останалите бонбони по равно на трите. Към тях се присъединили последователно Галя, Деси и Ева, и всеки път Ани изяждала по един бонбон, за да може останалото количество да се разпредели по равно на събралите се момичета. Накрая дошла и Жана. Колко най-малко бонбони трябва да изяде Ани този път така, че останалото количество бонбони да се разпредели по равно на седемте момичета?

**Решение:** Когато дошла Жана количеството бонбони  $N$  се дели на 6. Следователно  $N$  се дели на 2 и на 3 без остатък **(1 т.)** и на 4 – с остатък 2 **(1 т.)**. Следователно  $N$  се дели на 12 с остатък 6 **(1 т.)**.  $N$  се дели на 5 - с остатък 4 **(1 т.)**, следователно се дели на 60 с остатък 54 **(1 т.)**. Т.к бонбоните са били в началото 100, то  $N = 54$  **(1 т.)**. Следователно Ани трябва да изяде накрая най-малко 5 **(1 т.)** бонбона така, че останалите  $54 - 5 = 49$  бонбона да се делят на седемте момичета по равно.

**5.4.** Може ли да се поставят 1000 папки в 22 чекмеджета, така че във всяко чекмедже след първото да има или 5 папки повече, или 6 папки по-малко от предходното?

**Решение:** Нека означим папките в първото чекмедже с  $x$ . Тогава във второто може да има или  $x + 5$  или  $x - 6$  папки, в третото или  $x + 10$  или  $x - 1$  или  $x - 12$  **(1 т.)**. Означаваме папките в чекмеджетата с  $x, x + 5, x + 10, \dots, x + 105$  **(1 т.)**. Действителният брой папки в чекмеджетата се отличава от написаното число с 0 или кратно на 11 число **(2 т.)**. Сборът на всички папки в чекмеджетата е  $x + x + 5 + x + 10 \dots + x + 105 = 22x + 105 \cdot 11 = 11(2x + 105)$  или по-малък с кратно на 11 число **(2 т.)**. Сумата от папките се дели на 11, но 1000 не се дели на 11, следователно не може **(1 т.)**.

## VI клас

**6.1.** Два правоъгълни паралелепипеда са долепени един до друг, като новия правоъгълен паралелепипед е с размери 3 *cm*, 4 *cm* и 12 *cm*. Общата стена на паралелепипедите е с размери 3 *cm* и 4 *cm*. Да се намери отношението на обема на по-големия паралелепипед към обема на по-малкия паралелепипед, ако повърхнината на по-големия е два пъти по-голяма от повърхнината на по-малкия.

**Решение:** Нека размерите на получените паралелепипеди са 3, 4,  $x$  и 3, 4,  $12 - x$ , като първият има по-голяма повърхнина. Тогава ще имаме, че повърхнината на първият ще е  $24 + 14 \cdot x$ , а на вторият  $24 + 14(12 - x) \Rightarrow 24 + 14 \cdot x = 48 + 28(12 - x) \Rightarrow x = \frac{60}{7}$

Тогава отношението на обемите ще бъде  $\frac{3 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot 4 \cdot (12 - x)} = \frac{5}{2}$ .

**Оценяване:** **1 точка** за означаване, **по 1 точка** за изразяване на двете повърхнини, **1 точка** съставяне на за уравнение, **1 точка** за намиране на неизвестното и **1 точка** за отговор.

**6.2.** Намерете всички двойки трицифрени числа, сборът на които се дели на 296, а частното им е кратно на 3.

**Решение:** Нека двете числа са  $a$  и  $b$ . От условието  $\frac{a}{b} = 3 \cdot k$  и  $\frac{a+b}{296} = p \Rightarrow 100 \leq a = 3kb <$

$1000 \Rightarrow 0 < k \leq 3$  и  $b \leq 333 \Rightarrow \frac{a+b}{296} < \frac{1333}{296} < 5 \Rightarrow 0 < p \leq 4$

1. сл.  $k = 1, a = 3b, a + b = 4b = 296p$  намираме  $b = 74p, a = 222p$  и

$100 \leq b < a < 1000$ , получаваме  $2 \leq p \leq 4$ .

Намираме три решения:

- при  $p = 2, b = 148, a = 444$
- при  $p = 3, b = 222, a = 666$
- при  $p = 4, b = 296, a = 888$ .

2. сл.  $k = 2, a = 6b, a + b = 7b = 296p, 7$  не дели 296  $\Rightarrow 7$  дели  $p$ , но  $p \leq 4 \Rightarrow$  няма решение.

3. сл.  $k = 3, a = 9b, a + b = 10b = 296p, 5$  не дели 296  $\Rightarrow 5$  дели  $p$ , но  $p \leq 4 \Rightarrow$  няма решение.

**Оценяване:** За разглеждане на 1 сл. **2 точки**, за 2 сл. **2 точки** и за 3 сл. **2 точки**. Ако е пропуснат само един случай се дават не повече от 4 точки.

**6.3.** Ако числото  $2^{2019}$  е  $n$ -цифрено, а числото  $5^{2019}$  е  $m$ -цифрено, намерете стойността на  $n + m$ .

**Решение:** Нека  $a = 2^{2019}$  и  $b = 5^{2019}$ . Тогава са изпълнени неравенствата:

$$10^{n-1} < a < 10^n \text{ и } 10^{m-1} < b < 10^m \Rightarrow 10^{n+m-2} < a \cdot b < 10^{n+m}$$

$$\text{Но } a \cdot b = 2^{2019} \cdot 5^{2019} = 10^{2019} \Rightarrow n + m - 2 < 2019 < n + m \Rightarrow n + m = 2020$$

**Оценяване:** **2 точки** за  $10^{n-1} < a < 10^n$  и  $10^{m-1} < b < 10^m$ , **2 точки** за  $10^{n+m-2} < a \cdot b < 10^{n+m}$ , **2 точки** за  $n + m - 2 < 2019 < n + m$  и **1 точка** за отговор.



$$x_1 = -4, x_2 = 1.$$

(1 т.)

**7.2.** В разностранния  $\triangle ABC$  ( $AC > BC$ ) са построени ъглополовящата  $l_A$  на  $\sphericalangle BAC$ , ъглополовящата  $l_C$  на  $\sphericalangle BCA$  и ъглополовящата  $CL$  на външния ъгъл при върха  $C$ . През върха  $B$  е построена права  $g$ , успоредна на  $CL$ . Правата  $g$  пресича  $AC$  в точка  $M$ . Ъглополовящата  $l_C$  и перпендикулярната права от точка  $M$  към  $AB$  се пресичат в точка  $Q$ . Ъглополовящата  $l_A$  пресича правата  $g$  в точка  $F$ . Намерете мерките на ъглите на  $\triangle ABC$ , ако  $\sphericalangle AFM = 35^\circ$  и  $\sphericalangle MQC = 20^\circ$ .

**Решение:** Нека  $\sphericalangle BAC = 2\alpha$ , а  $\sphericalangle ABC = 2\beta$ .

Тогава  $\sphericalangle BCP = 2\alpha + 2\beta$ , като външен ъгъл на  $\triangle ABC$  и  $\sphericalangle BCL = \sphericalangle PCL = \alpha + \beta$ . (1 т.)

От успоредността на правите  $CL$  и  $g$  следва,

че  $\sphericalangle MBC = \sphericalangle BCL = \alpha + \beta$ . (1 т.)

От  $\triangle TQO$  – правоъгълен,  $\sphericalangle TOQ = 70^\circ$ .

$\sphericalangle COB = \sphericalangle TOQ = 70^\circ$  (връхни). (1 т.)

Ако  $AC > BC$ , то точка  $M$  е вътрешна за

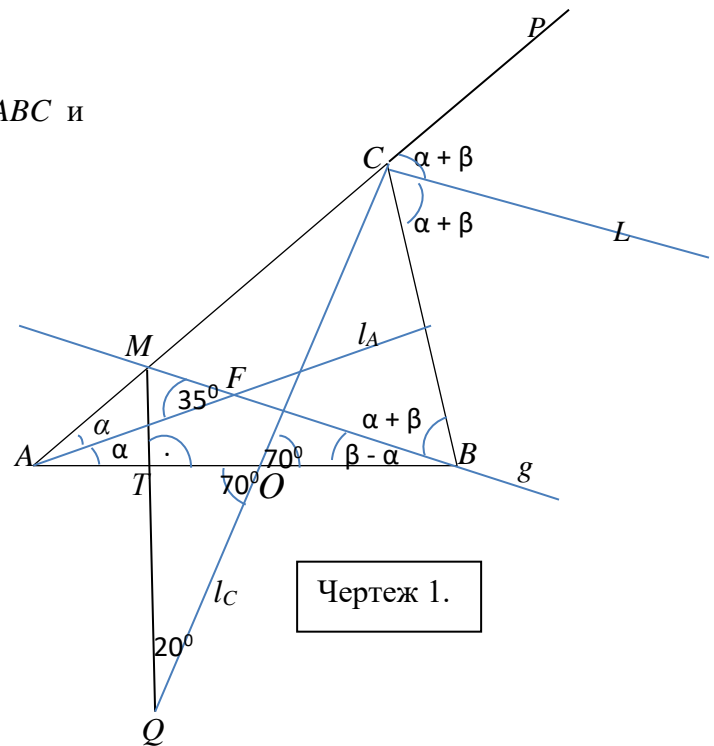
отсечката  $AC$  ( $\alpha + \beta < 2\beta$ ). (1 т.)

$\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle MBC = 2\beta - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha$

$\sphericalangle MFA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle FBA$  (външен за  $\triangle FAB$ ),

$35^\circ = \alpha + \beta - \alpha$ ,  $\beta = 35^\circ$  и тогава  $\sphericalangle ABC = 2\beta = 70^\circ$ . (1 т.)

В  $\triangle COB$   $\sphericalangle OCB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ . Следователно  $\sphericalangle ACB = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ . (1 т.)



**7.3.** Ливадата на фермера А е 4 дека. Сеното, събрано от тази ливада, стигнало на А да изхранва 3 крави в продължение точно на 8 месеца. Фермерът Б има ливада от 10 дека. Колко най-много кози може да изхранва Б в продължение на 6 месеца със сеното от ливадата си, ако Б е събрал с 20% повече сено от декар в сравнение с добива на А от декар и месечно изхранването на 9 кози е колкото изхранването на 4 крави? Продължителността на месеците не се взема под внимание.

**Решение:** Нека една крава на А месечно се нуждае от  $a$  кг сено. Тогава кравите на А общо са консумирали  $8 \cdot 3a = 24a$  кг, които били осигурени от сеното на А от 4 дека. (2 т.)

Следователно от един декар на А се получават  $6a$  кг. Сеното на Б е с 20% повече, значи от един декар ще се получават  $1,2 \cdot 6a = 7,2a$  кг, а от цялата ливада Б ще си осигури  $10,7,2a = 72a$  кг, което означава, че Б ще разполага с по  $72a : 6 = 12a$  кг сено за всеки от шестте месеца.

(2 т.)

Отчитаме, че 9 кози месечно потребяват толкова, колкото 4 крави, откъдето намираме, че месечно една коза се нуждае от  $\frac{4}{9}a$  кг. Тогава сеното на Б ще стига точно за  $12a : \left(\frac{4}{9}a\right) = 27$  кози.

(3 т.)

**7.4.** Двадесет войници са строени в редица. Всеки войник освен първият съобщава на старшината разликата от броя на приятелите си в ляво от него и броя на приятелите си в дясно от него (числата са цели числа от интервала  $[-19; 19]$ ). Приятелството е взаимно: ако А е приятел на В, то В е приятел на А. Докажете, че старшината би могъл сам да определи броя на приятелите на първия войник.

**Решение:** Нека за войника  $X_n$  означим с  $L_n$  броя на приятелите му в ляво от него и с  $D_n$  – броя на приятелите му в дясно от него. Очевидно  $D_1 = 0$  и  $L_{20} = 0$ .

(1 т.)

Нека си представим, че всеки двама приятели държат въже.

Сумата  $D_1 + D_2 + \dots + D_{20}$  е равна на броя на въжетата, като сме преброили въжетата по единия им край.

Сумата  $L_1 + L_2 + \dots + L_{19} + L_{20}$  е равна на броя на същите въжета, преброени по другия им край. Тогава  $L_1 + L_2 + \dots + L_{20} = D_1 + D_2 + \dots + D_{20}$ .

(5 т.)

Отгук  $D_{20} = L_1 + (L_2 - D_2) + \dots + (L_{19} - D_{19})$ .

(1 т.)